ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

«МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Задание к лабораторной работе

Дана система $Az = u$, в которой вместо матрицы A и вектора u известны приближенная матрица $\tilde{A}$ и приближенный вектор $\tilde{u}$. Указать h и δ в оценках $\|A - \tilde{A}\|_1 \leq h$ и $\|u - \tilde{u}\|_1 \leq \delta$.

Пусть z^α – вектор, минимизирующий функционал Тихонова $M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}]$. Выбрать $\alpha = \alpha(\Delta)$, где $\Delta = hq + \delta$, $q > \|z^0\|$ (z^0 - нормальное решение) так, чтобы существовал $\lim_{\Delta \to 0} z^{\alpha(\Delta)}$ (т.е., чтобы $z^{\alpha(\Delta)}$ было регуляризованным решением). Найти $z^{\alpha(\Delta)}$ для 8-10 убывающих значений Δ. Выбор $\alpha(\Delta)$ обосновать.

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Принять: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33 \ldots 3}_{n}$, $\quad n = \overline{7,15}$, при этом $\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33 \ldots 3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Принять</u>: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $\frac{2}{3} \approx 0,\underbrace{66\ldots6}_{n}$, $n = \overline{8,15}$, при этом

$$\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}, \left|\frac{2}{3} - 0,\underbrace{66\ldots6}_{n}\right| < 7 \cdot 10^{-(n+1)}.$$

Вариант 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 2 & 1 & 2/3 & 1/2 & 2/5 \\ 3 & 3/2 & 1 & 3/4 & 3/5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ 1/6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Принять</u>: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $\frac{2}{3} \approx 0,\underbrace{66\ldots6}_{n}$, , $\frac{1}{6} \approx 0,1\,\underbrace{66\ldots6}_{n}$ $n = \overline{7,15}$,

при этом

$$\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}, \left|\frac{2}{3} - 0,\underbrace{66\ldots6}_{n}\right| < 7 \cdot 10^{-(n+1)},$$

$$\left|\frac{1}{6} - 0,1\,\underbrace{66\ldots6}_{n}\right| < 7 \cdot 10^{-(n+1)}.$$

Вариант 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 2{,}5 \\ -4{,}2 \\ -2{,}8 \end{pmatrix}.$$

<u>Приближенно известны</u>: $a_{13} = -2 + \delta$, $a_{43} = 1 - \delta$, $a_{55} = 1 + \delta$, $u_2 = 0{,}4 + \delta$, $0 < \delta \le 10^{-5}$.

Вариант 5

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Приближенно известны</u>: $a_{12} = 2 + \delta$, $a_{33} = 2 - \delta$, $a_{44} = 2 + \delta$, $u_2 = 1 + \delta$, $0 < \delta \le 3 \cdot 10^{-6}$.

Вариант 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

<u>Принять</u>: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $n = \overline{7,15}$, при этом $\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Вариант 7

$A = (a_{ij}),\ a_{ij} = \frac{i+j}{2n}, \qquad i,j = \overline{1,n},$

$u = (u_j), \quad u_j = \frac{7-2(-1)^j}{j+1}, \quad j = \overline{1,n};\ n = 7.$

Дроби округлять, оставляя шесть десятичных знаков ($\delta = 10^{-6}$).

Вариант 8

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Приближенно известны</u>: $a_{14} = 3 + \delta, \quad a_{35} = \delta, \quad a_{56} = -3 + \delta,$ $u_3 = 1 + \delta, 0 < \delta \leq 10^{-5}.$

Вариант 9

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Принять</u>: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}, \quad n = \overline{8,15},$ при этом $\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}.$

Вариант 10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{12} = 1 + \delta$, $a_{53} = 1 - \delta$, $u_5 = 2 + \delta$, $0 < \delta \leq 2 \cdot 10^{-5}$.

Вариант 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Принять: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $n = \overline{7,15}$, при этом $\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Вариант 12

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{11} = 2 - \delta$, $a_{22} = 2 + \delta$, $a_{32} = 2 + \delta$, $a_{42} = 2 + \delta$, $u_1 = 2 + \delta$, $0 < \delta \leq 3 \cdot 10^{-4}$.

Вариант 13

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{11} = 3 - \delta$, $a_{15} = 3 + \delta$, $a_{31} = 1 + \delta$, $a_{35} = 1 - \delta$, $u_2 = 1 + \delta$, $0 < \delta \leq 10^{-4}$.

Вариант 14

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{12} = 1 + \delta$, $a_{33} = -1 + \delta$, $a_{53} = \delta$, $u_1 = u_2 = 2 + \delta$, $0 < \delta \leq 2 \cdot 10^{-4}$.

Вариант 15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Принять: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\dots3}_{n}$, $\frac{2}{3} \approx 0,\underbrace{66\dots6}_{n}$, $n = \overline{8,15}$, при этом

$$\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\dots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}, \quad \left|\frac{2}{3} - 0,\underbrace{66\dots6}_{n}\right| < 7 \cdot 10^{-(n+1)}.$$

Вариант 16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{11} = 1 + \delta$, $u_1 = 3 - \delta$, $u_4 = 6 + \delta$, $0 < \delta \leq 10^{-5}$.

Вариант 17

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{22} = \delta$, $a_{25} = 3 + \delta$, $a_{41} = 1 - \delta$, $u_2 = u_3 = 2 + \delta$, $0 < \delta \leq 3 \cdot 10^{-4}$.

Содержание отчета

Отчет должен содержать титульный лист, номер варианта, краткое описание применяемого метода регуляризации и пошаговый алгоритм выполнения задания.

Результаты решения задачи следует оформить в виде следующей таблицы:

$\Delta_1 = \cdots$	$\Delta_2 = \cdots$	$\Delta_3 = \cdots$	…	$\Delta_7 = \cdots$	$\Delta_8 = \cdots$
$z_1 = \cdots$	$z_1 = \cdots$	$z_1 = \cdots$	…	$z_1 = \cdots$	$z_1 = \cdots$

$z_2 = \cdots$	$z_2 = \cdots$	$z_2 = \cdots$	$\ldots$	$z_2 = \cdots$	$z_2 = \cdots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	..	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$z_n = \cdots$	$z_n = \cdots$	$z_n = \cdots$	$\ldots$	$z_n = \cdots$	$z_n = \cdots$

Приближенное нормальное решение $z^0 = \begin{pmatrix} z_1 = \cdots \\ z_2 = \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ z_n = \cdots \end{pmatrix}$ (последний столбец таблицы).

Обязательно наличие выводов по проделанной работе. В случае несвоевременного выполнения задания к отчету прилагается USB носитель с выполненным заданием.